UNIDAD DE APRENDIZAJE V

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Interpreta y utiliza correctamente el lenguaje simbólico para el manejo de expresiones algebraicas. 2. Relaciona la ecuación algebraica lineal con la gráfica que representa y viceversa.	**A** Concepto de ecuación y su clasificación.
	B Propiedades de las igualdades.
	C Ecuaciones de primer grado.
	D Sistemas de ecuaciones lineales.
	E Solución por reducción.
	F Plano cartesiano.
	G Tabulación. Método gráfico.
	H Concepto de determinante. Regla de Cramer.
	I Problemas de aplicación.

A Concepto de ecuación y su clasificación

Identidad	Es una igualdad evidente, como 25 = 25 o 7 x 4 =28. También se denomina identidad a la igualdad de dos expresiones algebraicas equivalentes, como $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ o $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Es decir que no importa qué valor le demos a incógnitas, la igualdad numérica siempre se cumple.

Ejemplo

La igualdad $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ es una identidad, pues para cualquier valor de x la igualdad se cumple. Por ejemplo, si $X = 2$, se tiene que

$[3(2) + 2]^2 = 9(2)^2 + 12(2) + 4$

$(6 + 2)^2 = 36 + 24 + 4$

$8^2 = 64$

$64 = 64$

De la misma manera, para cualquier otro valor de x se llegará a una identidad.

Ecuación

Una ecuación es una igualdad ente dos expresiones algebraicas. Una ecuación se convierte en una identidad sólo para ciertos valores de la cantidad o las cantidades desconocidas que en ella intervienen.

Ejemplo

1. 3x = 6 se convierte en identidad para x = 2: 3(2) =6, o 6 = 6.

2. 4x + 5 =29 se convierte en identidad para x =6: 4(6) + 5 = 29, o 29 = 29.

3. $\frac{6x}{3}$ + 5 =13 se convierte en identidad para x 4: $\frac{6(4)}{3}$ + 5 = 13, o 13 = 13.

Incógnitas

En las ecuaciones intervienen cantidades desconocidas, denotadas con letras, y números. A las literales se les llama incógnitas. Resolver una ecuación significativa encontrar el valor de la o las incógnitas. En la ecuación $3x + 8 = 23$, la incógnita es $\boldsymbol{x}$; en la ecuación $4x + 5z = 32$, las incógnitas son $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$. para estas igualdades se deben encontrar valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$ que al sustituirlos transformen la igualdad en una identidad.

Ejemplo

1. $x^2 - 9 = 0$ se convierte en una identidad para x = 3 o para x = -3:

$(3)^2 - 9 = 0 \quad (-3)^2 - 9 = 0$

$9 - 9 = 0 \quad 9 - 9 = 0$

$0 = 0 \quad 0 = 0$

2. $3x^2 - 48 = 0$ se convierte en una identidad para x = 4 o para x = - 4 :

$3(4)^2 - 48 = 0 \quad 3(-4)^2 - 48 = 0$

$3(16) - 48 = 0 \quad 3(16) - 48 = 0$

$48 - 48 = 0 \quad 48 - 48 = 0$

$0 = 0 \quad 0 = 0$

Ejercicios Determina si las siguientes igualdades son identidades ecuaciones.

[1] $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$

[2] $3x + 5 = 29$

[3] $(x + 5)(x - 4) = 52$

[4] $(x + 5)(x - 4) = x^2 + x - 20$

[5] $(x + 5)(x - 49 = x^2 - 25$

[6] $5x - 12 = 18$

[7] $11x + 20 = 2x - 16$

[8] $4(x + 12) + 2x = 6x + 48$

[9] $7x - 30 = 9x - 40$

Clasificación de Ecuaciones

Una ecuación en la que el mayor exponente de la o las incógnitas es 1 es una ecuación de primer grado o ecuación lineal. Si el mayor el mayor exponente es 2, es una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.

El mayor exponente en una ecuación algebraica coincide con el número de valores de la incógnita que convierte a la ecuación en identidad. Si el primer grado la incógnita solo tendrá un valor; si es de segundo grado la incógnita tendrá dos valores que transformen a la

Las ecuaciones pueden tener una o más incógnitas; se les denomina así

- Ecuaciones de primer grado con una incógnita: $3x + 2 = 17$.
- Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas: $3x + 5y = 21$.
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita: $x^2 + 9x + 20 = 0$.
- Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas: $x^2 + y^2 = 34$.

Etcétera

C Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Resolución de ecuaciones.

Uno de los objetivos principales de álgebra es resolver ecuaciones. Mediante ellas, podemos dar solución a diversos problemas. Veamos un ejemplo de cómo se origina o se forma una ecuación algebraica.

Una aplicación inmediata de las ecuaciones es en la solución de problemas planteados con palabras, estos son tantos y tan variados que no existe un método que se pueda aplicar en común a todos, mas sin embargo se puede dar una estrategia que ayudará a organizar el planteamiento.

1) Leer cuidadosamente el problema.
2) Hacer figuras o diagramas en el que señalemos las partes conocidas y desconocidas.
3) A las partes desconocidas identificarlas con una incógnita, y si existen otras trate de representarlas en función de la primera.
4) Diseñar una ecuación que involucre y relacione las cantidades conocidas y desconocidas
5) Resuelve la ecuación y verificarla al final

Ejemplo

Un pantalón y un cinturón cuestan \$110.00. Si el pantalón cuesta \$110.00 más que el cinturón, ¿cuánto cuesta cada artículo?

- ¿cuánto vale el pantalón?
- ¿cuánto vale el cinturón?

El problema de este ejemplo puede resolver mediante ensayo y error. Trata d encontrar de esta forma la solución. Completa la siguiente tabla, y seguramente encontrarás el precio del cinturón y del pantalón bajo las condiciones impuestas en el problema. ¿Cuáles son esas condiciones?

Posibles precios ($)		**Suma de los precios $**	**Cuánto más vale el pantalón**
Cinturón	**Pantalón**		
1	108	110	108
2	109	110	106
3	107	110	
4		110	
5		110	
6		110	

Discute con tus compañeros las soluciones posibles del problema, y marca la fila de la tabla que cumpla con las condiciones del problema.

Veamos ahora cómo se puede resolver este problema mediante el álgebra. Primero señalamos la incógnita, esto es, de cuál artículo es conveniente conocer primero su precio ,al cual denotaremos con x. en este caso, se considera que conviene primero conocer el valor del cinturón. Así, x representa el precio del cinturón.

- Precio del cinturón x.
- Precio del pantalón $x + 100$.
- Precio de los dos artículos 110.
- Ecuación $x + (+100) = 110$.

Ahora resolvamos la ecuación:

$$x + (x + 100) = 100$$

$$x + x + 100 = 100$$

$$2x = 100$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

Luego, como hemos encontrado que $x = 5$, sabemos que el cinturón vale $ 5.00. Como el pantalón vale $ 100.00 más que el cinturón, vale $ 5.00 más $ 100.00, lo que da un precio de $105.00

$$Precio\ del\ cinturón + precio\ del\ pantalón = \$\,110.00$$

$$\$5.00 + \$\,1055.00 = 110.00.$$

Verifica que se cumplan las condiciones del problema.

Antes de continuar con la resolución de problemas, aprenderemos a resolver ecuaciones. Al saber cómo se forman las ecuaciones, se nos facilitará su resolución y a la vez la de los problemas que las originen. En las siguientes dos columnas, se construyen ecuaciones (izquierda) y se resuelven (derecha).

Ejemplo Resolver la ecuación (resolverla significa hallar el valor de la incógnita)

Vamos a construir una ecuación en la que la incógnita tendrá un valor de 4 (puede ser cualquier valor: tú lo escoges).

Misma cantidad, o si se multiplican o dividen por la misma cantidad".

X=4

Si sumamos 5 a los dos miembros entre 3, tendremos.

$$\frac{x+5}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{x+5}{3.}$$

Si sumamos 7 a ambos miembros,
Obtenemos
x + 5 – 5 = 9 – 5

$$\frac{x+5}{3} + 7 = 3 + 7$$

$$\frac{x+5}{3} + 7 = 10.$$

Vamos a resolver la ecuación (resolverla significa hallar el valor de la incógnita)

$$\frac{x+5}{3} + 7 = 10$$

Así,

$$\frac{x+5}{3} = 3$$

Para eliminar el divisor 3, multiplicamos los dos miembros por 3 (la multiplicación es la operación inversa de la división):

$$3\,\frac{(x+5)}{3} = 3\ (3),$$

$$x + 5 = 9.$$

El inverso aditivo de +5 es −5, por lo que ahora restamos 5 a ambos miembros:

$$x = 4.$$

Observa que los pasos de la primera columna son los mismos pasos que e la segunda, pero en orden inverso.
Resolver una ecuación consiste entonces en regresar los pasos efectuados para construirla, hasta llegar al valor con la cual se inició.
Veamos otro ejemplo de construcción de una ecuación, y luego resolvámosla.

Ejemplo Resolver la ecuación (resolverla significa hallar el valor de la incógnita)

- Para x = 7, restando 3 a ambos miembros:

  $$x - 3 = 4;$$

  multiplicando los dos miembros por 3 :

  $$3(x - 3) = 12;$$

  Sumando 8 a dos miembros:

RECUERDA

Términos son las expresiones que están separadas por un signo + o un signo −. Miembro es cada una de las expresiones completa a uno y otro lado del signo = se llama primer miembro, y de la derecha, segundo

$3(x-3) + 8 = 20;$

Finalmente, dividiendo los dos miembros entre 4:

$\frac{3\,(x-3)+8}{4} = 5$

Ahora resolvamos la ecuación que acabamos de construir. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 4. El factor 4 del primer miembro se elimina con el divisor 4, y el segundo miembro se obtiene 20:

$\frac{3\,(x-3)+8}{4} \text{ x } 4 = 5 \text{ x } 4,$

$3(x - 3) + 8 = 20.$

Eliminamos el sumado 8 restando 8 a los dos miembros. Se cancelan + 8 y −8 en el primer miembro, y en el segundo miembro queda el resultado de la sustracción 20 – 8:

$3(x - 3) + 8 - 8 = 20 - 8,$

$3(x - 3) = 12.$

Eliminamos el factor 3. Para ello, dividimos entre 3. En el primer miembro se elimina el factor 3 con el divisor 3, y el segundo miembro queda 12 entre 3,que es igual a 4:

$\frac{3(x-3)}{3} = \frac{12}{3},$

$x - 3 = 4.$

Finalmente, el 3 de primer miembro, que está restando, se elimina sumando 3 a ambos miembros :

$x - 3 + 3 = 4 + 3,$

$x = 7.$

Hemos obtenido el valor con el que iniciamos la construcción de la ecuación.

A continuación se resuelven algunas ecuaciones simplificando los pasos.

$\left.\begin{array}{l} x + 12 = 27 \\ x = 27 - 12 \\ x = 15 \end{array}\right\}$ Un número que está sumando, pasa el otro miembro restando, y si está restando, pasa sumando. $\left\{\begin{array}{l} x - 23 = 24 \\ x = 24 + 23 \\ x = 47 \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} 5x = 30 \\ x = 6 \\ x = \frac{30}{5} \end{array}\right\}$ Un factor pasa al otro miembro como divisor, y un divisor pasa como factor. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{4} = 9 \\ x = 9(4) \\ x = 36 \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} x^2 = 49 \\ x = \pm\sqrt{49} \\ x = \pm 7 \end{array}\right\}$ Un exponente pasa al otro miembro como radical, y un radical pasa como exponente. $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} = 6 \\ (\sqrt{x})^2 = 6^2 \\ x = 36 \end{array}\right.$

En los siguientes ejemplos, observarás que al resolver las ecuaciones estamos aplicando las reglas indicadas los ejemplos anteriores.

Como habrás notado, para resolver una ecuación la operación que se realiza en un miembro se debe realizar también en el otro para que también en el otro para que no se altere la igualdad.

Ley de uniformidad.

- Una ecuación no cambiara s a los dos miembros se les suma o se les resta la misma cantidad.
- Una ecuación no cambiara si sus dos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad.

Ejemplo Resolver las siguientes ecuaciones:

[1] Ecuación: $5x + 9 = 39$

Restamos 9 a ambos miembros: $5x + 9 - 9 = 39 - 9$,

$5x = 30$

Dividimos los dos miembros entre 5: $\frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$.

Resultado: $x = 6$.

[2] Ecuación: $\frac{3x+7}{6} = 7$

Multiplica los dos miembros de los 6: $\frac{6\,(3x+7)}{6} = 6(7)$.

Resultado 7 a los dos miembros: $3x + 7 - 7 = 42 - 7$,

$3x = 35$.

Dividiendo los dos miembros entre 3: $x = \frac{35}{3}$.

[3] Ecuación: $5x + 30 = 70$

$5x = 70 - 30$

$5x = 40$

$x = \frac{40}{5}$

$x = 8$

[4] Ecuación: $\frac{x-23}{4} = 10$

$x - 23 = 10\,(4)$

$x - 23 = 40$

$x = 40 + 23$

$x = 63$

[5] $5x^2 = 80$

$x^2 = \frac{80}{5}$

$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Ejercicios

[1] Construye ecuaciones para los siguientes valores de la incógnita x, y resuélvelas.

[a] $x = 7$	**[d]** $x = 2$	**[g]** $x = 3$	**[j]** $x = 17$	**[m]** $x = 12$	**[o]** $x = 18$
[b] $x = 4$	**[e]** $x = 9$	**[h]** $x = 6$	**[k]** $x = 10$	**[n]** $x = 5$	**[p]** $x = 43$
[c] $x = 9$	**[f]** $x = 11$	**[i]** $x = 8$	**[l]** $x = 23$		

[2] Resuelve las siguientes ecuaciones.

[a] $3x + 8 = 35$ **[c]** $7x + 5 = 8x$

[b] $5x - 12 = 113$ **[d]** $3x = 48$

[e] $4x + 7 = 39$ **[f]** $\frac{5x}{2} + 4 = 24$

[g] $5x - 9 = 31$ **[l]** $\frac{3x+8}{5} + 9 = 13$

[h] $7x + 2 = 5x - + 10$ **[m]** $\frac{6x}{3} + 9 = 17$

[i] $3x - 5 = 5x - 29$ **[n]** $3x + 6 = 2x + 10$

[j] $6x + 8 = 2x + 28$ **[o]** $5x - 4 = 4x$

[k] $9x - 4 = 6x + 14$ **[p]** $4x - 12 = 0$

[q] $8x - 9 = 7x - 4$ **[v]** $x + 2 = 2x - 6$

[r] $4x + 3 = 8x - 9$ **[w]** $3x + 15 = 0$

[s] $5x - 5 = 12x - 26$ **[x]** $2 - 3x = 10 + x$

[t] $9x + 4 = 5x + 12$ **[y]** $\frac{5x+11}{3} - 9 = 8$

[u] $6x + 9 = 9x - 19$

Ecuaciones lineales con denominadores

Una ecuación entera es aquella que no tiene denominadores. Algunas ecuaciones lineales requieren de algunas operaciones para dejaras en forma entera, eliminando denominadores.

Ejemplo El siguiente problema, que ilustra el planteamiento de ecuaciones lineales con denominadores, es muy conocido:

Un gavilán que era muy enamorado pasó volando frente a un grupo de palomas o las que dijo:

– ¡adiós mis cien palomas!

A lo que una paloma le contestó:

- No señor, no somos cien, con nosotras y otras tantas, más de la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras y usted, sí somos cien.
- ¿cuántas palomas eran?

Este problema se puede resolver mentalmente, mediante ensayo y error. ¿Cuántas palomas crees que eran? Encontraremos la respuesta utilizando el álgebra.

Con nosotras: x

+

Otras tantas: x

+

La mitad de nosotras: $\frac{x}{2}$

+

La cuarta parte de nosotras: $\frac{x}{4}$

+

Y usted: 1

Y sí somos 100: $x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100.$

Para resolver la ecuación, la convertimos primero en una ecuación entera, esto es, eliminamos los denominadores. Veamos cómo.

Dados que hay dos denominadores, se busca el mínimo común múltiplo (mcm)de ambos, que es 4. Multiplicamos por el mcm todos los términos de la ecuación:

$$4(x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1) = 4\ (100)$$

$$4x + 4x\frac{4x}{2} + \frac{4x}{4} + 4 = 400.$$

Así, se tiene que $4x + 4x + 2x + x + 4 = 400.$

Reduciendo términos semejantes, $11x + 4 = 400$. Luego,

$$11x = 400 - 4,$$

$$11x = 396,$$

$$x = \frac{396}{11},$$

$x = 36$. Lo que significa que eran 36 palomas las que pasaron volando.

Comprobación

$$36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100,$$

$$100 = 100.$$

Ejemplos A continuación resolveremos más ejemplos de ecuaciones con varios denominadores:

[1] Resuelve la ecuación $x + \frac{x}{3} + 2x + \frac{x}{2} = 46.$

Como resolver los denominadores son 2 y 3, se multiplican todos los términos de la ecuación por el mcm de 2 y 3, que es 6:

$$6(x + \frac{x}{3} + 2x + \frac{x}{2}) = 6(46),$$

$$6x + \frac{6x}{3} + 12x + \frac{6x}{2} = 276.$$

Se hacen las divisiones, y la ecuación se convierte en entera:

$$6x + 2x + 12x + 3x = 276.$$

Se reducen términos semejantes: $23x = 276$.

Valor de x: $x = \frac{276}{23},$

$x = 12$. Verifica el resultado.

[2] Resuelve la ecuación $\frac{x+7}{3} + \frac{3x-7}{4} = 6.$

Se busca el mcm de los denominadores 3 y 4, que es 12, y se multiplican ambos miembros de la ecuación por 12:

$$12\ (\frac{x+7}{3} + \frac{3x-7}{4}) = 12\ (6),$$

$$\frac{12(x+7)}{3} + \frac{12\ (3x-7)}{4} = 12\ (6).$$

Para convertirla en una ecuación entera, conviene dividir 12 entre 3 y 12 entre 4 (pudieran multiplicarse los dos binomios, x + 7 y 3x −7, por 12 y después dividir):

$4\,(x + 7) + 3\,(3x - 7) = 72.$

Se desarrollan las multiplicaciones indicadas:

$4x + 28 + 9x - 21 = 72.$

Se juntan términos semejantes (los términos en x en el primer miembro, y los términos independientes en el segundo), y se simplifica:

$4x + 9x = 72 - 28 + 21,$

$13x = 65.$

Luego, 13 pasa al segundo miembro dividiendo:

$x = \frac{65}{13},$

$x = 5.$ Verifica el resultado.

[3] Resuelve la ecuación $\frac{x-8}{3} = \frac{3x-40}{5}$.

Una manera de resolver esta ecuación, como en el ejemplo 2, consiste en buscar el mcm de los denominadores, que es 15, y multiplicar ambos miembros de la ecuación por 15. Sin embargo, cuando una ecuación está formada por fracciones, es más sencillo aplicar la ley de la igualdad de fracciones siguiente:

Si dos fracciones son iguales, sus productos cruzados son iguales.

Así,

$5(x-8) = 3\,(3x-40).$

Al desarrolla los productos se obtiene

$5x - 40 = 9x - 120.$

Juntando los términos semejantes y simplificando, se tiene que

$5x - 9x = -120 + 40,$

$-4x = -80$

$x = \frac{-80}{-4},$

$x = 20.$ Verifica el resultado.

Ejercicios Resuelve las siguientes ecuaciones, y compara con tus compañeros los resultados.

[1] $\frac{3x}{2} + \frac{6x}{3} + \frac{x}{2} = 16$

[2] $\frac{4x}{2} + x + \frac{3x}{5} = 36$

[3] $\frac{7x}{2} + \frac{12x}{6} + \frac{5x}{4} = 29$

[4] $\frac{3x}{9} + \frac{5x}{4} + 3x = 55$

[5] $\frac{7x}{4} + \frac{8x}{2} - 2x = 29$

[6] $x + \frac{x}{3} + \frac{2x}{8} = 24$

[7] $x + \frac{2x}{4} + 3x = \frac{3x}{2} + \frac{4x}{8} + 13$

[8] $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{3} + 3x = 2x + 25$

[9] $\frac{4x+4}{3} = \frac{7x-32}{2}$

[10] $\frac{3x-6}{5} = \frac{4x+36}{10}$

[11] $3x + \frac{4x}{3} - \frac{2x}{3} = 4x - 1$

[12] $\frac{5x}{2} + \frac{8x}{2} + \frac{3x}{6} = 8$

[13] $\frac{x}{2} + \frac{2x}{5} = 9$

[14] $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{4} + 2x = 38$

[15] $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{4} + x = 21$

Ecuaciones con paréntesis

Los paréntesis se usan generalmente para indicar asociaciones de números y también para jerarquizar las operaciones indicadas, esto es, qué operación debe realizarse primero.

Ejemplos

[1] Resuelve la ecuación $3x + 2(x + 5) - 3(x + 4) = 3(2x - 4) - (5x + 4) + 19$.

Eliminando los paréntesis mediante el desarrollo de los productos indicados, se tiene que

$$3x + 2x + 10 - 3x - 12 = 6x - 12 - 5x - 4\ 19.$$

Juntando términos semejantes (en el primer miembro los que tienen incógnita y en el segundo los términos independientes):

$$3x + 2x - 3x - 6x + 5x = -10 + 12 - 12 - 4 + 19.$$

Finalmente, reduciendo términos semejantes: $x = 5$.

Cuando hay varios tipos de grupos de agrupación (paréntesis, llaves y corchetes),se inicia eliminando los signos de agrupación interiores.

[2] resuelve la ecuación $3x + 2[3x-(2x+ 5) + 3(x + 4)] = 5x + 3(x + 2) + 26$.

Primero eliminamos los paréntesis:

$$3x + 2[3x - 2x - 5 + 3x + 12] = 5x + 3x + 6 + 26.$$

Luego eliminamos los corchetes:

$$3x + 6x - 4x - 10 + 6x + 24 = 5x + 3x + 6 + 26.$$

Juntando los términos en x en el primer miembro y los independientes en el segundo:

$$3x + 6x - 4x + 6x - 5x - 3x = 6 + 26 + 10 - 24.$$

Reduciendo términos semejantes:

$$3x = 18,$$

$$x = 6.$$

Ejercicios Resuelve las siguientes ecuaciones, y compara con tus compañeros los resultados.

[1] $5x + 2[3x + 4\{5x - 8(2x + 4) - 9\} + 5x] + 600 = 56$

[2] $3x + 5[2x + 3\{2x + 5(x + 4) + 8\} - 6] = 980$

[3] $5x + 4\{3x + 8(2x + 9) + 3\} = 624$

[4] $8x + 2(7x + 1) - 3(x + 4) = 104$

[5] $6(3x + 4) - 8(2x - 5) + 6x = 80$

[6] $5(3x - 2) - 8(2x + 3) - 9 = -51$

[7] $4x - 2(x + 5) + 5(2x - 4) = 90$

Resolución de problemas

Veamos algunos ejemplos cuya resolución requiere de una ecuación lineal. El método que se utiliza en algebra consiste en tres pasos principales:

- Expresar la incógnita con una letra; lo más común es usar x, y o z. las cantidades conocidas se denotan con las primeras letras.
- Establecer una relación entre los datos y la o las incógnitas.
- Encontrar el o los valores de la o las incógnitas que transformen las relaciones

Así, lo primero que debes hacer para resolver el problema es identificar la incógnita, es decir, que valor se necesita determinar primero, para que en términos de este se hagan comparaciones o establezcan relaciones para plantear una ecuación que represente el problema

Ejemplos

[1] Un cuaderno cuesta $5.00 más que un lápiz. ¿Cuál valor debemos determinar primero: el precio del cuaderno o el lápiz? Esto es, ¿Cuál es la incógnita?

- Si consideramos que el precio del lápiz es la incógnita y lo representamos con una x ,el precio del cuaderno queda representado como x + 5
- Si consideramos que el precio del cuaderno es la incógnita y lo representamos con una x, el precio del lápiz será x−5.

[2] Un refresco y una torta cuestan $8.00. Si la otra torta vale $2.00 más que el refresco, ¿Cuál es la incógnita?

Por la forma en que está planeada la situación, conviene considerar como incógnita el precio del refresco, para luego sumarle $2.00 y así saber el precio de la torta.

Esto es, siendo x el precio del refresco, se tiene que

Precio del refresco + precio de la torta = 8,

Precio del refresco + (precio del refresco + 2) = 8,

$x + (x + 2)$

$(x + x) + 2 = 8$

$2x + 2 = 8$

Resolviendo una última ecuación,

$2x = 8 - 2,$

$2x = 6,$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3.$

O también,

$2(x + 1) = 8,$

$x + 1 = \frac{8}{2},$

$x + 1 = 4,$

$x = 4 - 1,$

$x = 3.$

Luego, el refresco cuesta $3.00 y la torta

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

esto es, la torta cuesta $5.00.

Comprobación

Precio del refresco + precio de la torta = 3 + 5 = 8.

Por otra parte, si se considera que la incógnita es el precio de la torta, x, como la torta cuesta $2.00 más que el refresco, el precio del refresco debe ser x- 2. Así,

Precio del refresco + Precio de la torta = 8

$$(x-2)+\ x=8$$

$$x-2+x=8$$

$$2x-2=8.$$

Resolviéndola:

$$2\,(x-1)=8$$

$$x-1=\frac{8}{2},$$

$$x-1=4,$$

$$x=4+1$$

$$x=5.$$

Así, el precio de la torta es $5.00 y el del refresco,

$x-2=5-2=3,$ *esto es, $3.00.*

[3] Un cuaderno vale $3.50 más que un bolígrafo, y los dos cuestan $10.00 ¿cuánto cuesta cada uno?

Si tomamos el precio del bolígrafo como incógnita y lo representamos con x, el cuaderno cuesta x + 3.50. Así, en una ecuación que modela este problema es

$x+x+3.50=10.00$ ó, lo que es lo mismo $2x+3.50=10.00$

Resolviéndola

$$2x=10.00-3.50$$

$$2x=6.50,$$

$$x=\frac{6.50}{2},$$

$$x=3.25.$$

Así, que el bolígrafo cuesta $3.25 y el cuaderno $3.25 + $3.59 = $6.75.

Comprobación

Precio bolígrafo + precio del cuaderno = 10.00,

3.25 + 6.75 = 10.00.

Ejercicios Resuelve las siguientes ecuaciones. Comprueba si el resultado es correcto

[1] Tres amigos fueron a comer a un restaurante. Pedro consumió $10.00 más que Luis y Jaime $15.00 más que Pedro. Entre los tres pagaron $95.00. ¿Cuánto consumió cada uno?

Consumo Pedro:
Consumo Luis:
Consumo Jaime:
Ecuación:
Solución:

[2] Una torta y un refresco cuestan $17.00. ¿Cuál es el precio de cada uno si la torta cuesta $5.00 más que el refresco?

Precio de la torta:
Precio del refresco:
Ecuación:
Solución:

[3] En un grupo de primer semestre de bachillerato tecnológico hay 53 alumnos; el número de mujeres es de 27 más que el número de hombres. ¿Cuántos alumnos hay de cada sexo?

Número de hombres:
Número de mujeres:
Ecuación:
Solución:

[4] Las edades de dos hermanos suman 20 años; el mayor tiene 4 más que el menos. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Edad del hermano mayor:
Edad del hermano menor:
Ecuación:
Solución:

[5] El precio de un cuaderno es el doble del precio de un bolígrafo. Si pagué $10.00 por los dos artículos, ¿cuál es el precio de cada uno?

Precio del bolígrafo:
Precio del cuaderno:
Ecuación:
Solución:

Ejemplos Ahora veamos un ejemplo de resolución de problemas sobre números consecutivos

Dos números consecutivos suman 51. Hallar los dos números.

Número menor: x,
Número mayor: x + 1,
Número menor + número mayor = 51,

Ecuación: $x + x + 1 = 51$ o

$$2x + 1 = 51,$$

$$2x = 51 - 1,$$

$$2x = 50,$$

$$x = 25.$$

Así, el número menor es 25 (al cual se designó como x) y el número mayor es 25 + 1 = 26.

Comprobación: $25 + 26 = 51,$ $51 = 51.$

Ejercicios Resuelve las siguientes problemas, y compara con tus compañeros los resultados:

1: Halla tres números consecutivos sabiendo que su suma es igual a 54.

2: Tres números consecutivos suman 21. ¿Cuáles son esos números?

3: Halla dos números pares consecutivos sabiendo que su suma es igual a 118.

4: Dos números pares que son consecutivos y su suma es 202. Halla esos números.

5: Tres números impares son consecutivos y su suma es 219.

6: Tres números impares son consecutivos y su suma es 51. Halla esos números.

7: Dos números pares son consecutivos y el nombre de su suma es 52. Halla esos números.

8: Tres números son consecutivos y la mitad de su suma es 24. ¿Qué números son?

9: Cuatro números pares son consecutivos y su suma es 20. ¿Cuáles son esos números?

10: El doble de la suma de tres números consecutivos es 42. ¿Cuáles son esos números?

Ejemplo A continuación se da un ejemplo de resolución de problemas sobre ángulos.

Si un ángulo es igual a la mitad de su complemento, halla la amplitud de ese ángulo.

Ángulo + complemento = 90º
Complemento: x,
Ángulo: $\frac{x}{2}$,
Ecuación: $x + \frac{x}{2} = 90º$.
Si aplicamos ambos miembros de la ecuación por 2, se obtiene

$$2x + x = 180º$$

$$3x = 180º$$

$$x = 60º.$$

Así, el ángulo es igual a 30º y su complemento es igual a 60º.

Ejercicios Resuelve las siguientes problemas, y compara con tus compañeros los resultados:

1: Un ángulo es igual al doble de su complemento. Halla la amplitud del ángulo.

2: Un ángulo es el triple de su complemento. Halla la amplitud del ángulo.

3: Dos ángulos son complementarios; si uno mide 56º 38’, halla la amplitud del otro ángulo.

4: Un ángulo mide 24º más que su complemento. Halla la amplitud de cada uno.

5: Un ángulo mide 36º menos que su complemento. Halla la amplitud de cada uno.

6: Un ángulo mide 12º más que el doble de su complemento. Halla la amplitud de cada uno.

7: Un ángulo mide 32º más que el doble de su complemento. Halla la amplitud de cada uno.

8: Dos ángulos sumas 124º; si uno mide la mitad de otro, halla la amplitud de cada uno.

9: Dos ángulos son suplementarios; si uno mide la mitad del otro, halla la amplitud de cada uno.

10: Dos ángulos son suplementarios; si uno mide el doble del otro, halla la amplitud de cada uno.

11: En un triángulo, el ángulo mayor mide 20º más que el mediano y el ángulo menor mide 20º menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada ángulo?

12: Dos ángulos son suplementarios; si uno mide 20º más que el otro, ¿cuánto mide cada ángulo?

13: Dos ángulos son complementarios; si uno mide 16º más que el otro, ¿cuánto mide cada ángulo?

14: Dos ángulos suman 240º; si uno es el doble del otro, ¿cuánto mide cada ángulo?

15: Dos ángulos suman 170º; si uno mide 30º más que el otro, ¿cuánto mide cada ángulo?

Ejemplo Veamos la resolución de un problema sobre edades, usando ecuaciones lineales.

La edad de Pedro es el triple de la de su hermano, y las dos edades suman 16 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Edad del hermano: x
Edad de Pedro: $3x$
Ecuación: $x + 3x = 16$,

$$4x = 16,$$
$$x = \frac{16}{4},$$
$$x = 4$$

El hermano tiene 4 años, y Pedro tiene $3x = 3(4) = 12$ años.

Comprobación

$$12 + 4 = 16,$$
$$16 = 16$$

Ejercicios Resuelve las siguientes problemas, y compara con tus compañeros los resultados:

1: Resuelve los siguientes problemas sobre edades.

a) Luis tiene 5 años más que su hermano Carlos, y las dos edades suman 39 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

b) Héctor tiene el doble de la edad de Carlos, y las dos edades suman nueve años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

c) Jaime tiene 10 años más que Lalo, y las dos edades suman 70 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

d) Andrés tiene 4 años más que Pedro, y las dos edades suman 34 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

e) Luis tiene 5 años más que el doble de la edad de su hermano Héctor, y las dos edades suman 35 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

2: Resuelve los siguientes problemas.

a) Dos personas salen del mismo punto a las 8 de la mañana, en distinto automóvil. Uno sale hacia el este a una velocidad de 90 km/h y el otro hacia el oeste a 100/km/h. ¿A qué hora estarán a 950 km de distancia uno del otro?

b) Un rectángulo mide el doble de largo que de ancho y su perímetro es de 36 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

c) En una elección en la que participaron 1450 alumnos para elegir a la mesa directiva de su sociedad de alumnos, la planilla blanca obtuvo 150 votos más que la planilla verde. ¿Cuántos votos obtuvo cada una?

d) A las 12 horas, dos trenes salen en sentidos opuest6os de dos ciudades que se encuentran a 300 km de distancia una de la otra. La velocidad de uno de los trenes es de 40 km/h y la de otro es de 35 km/h. ¿A qué hora se encontrarán?

e) El área de un jardín rectangular es de 432 m^2 y uno de sus lados mide 12 m. ¿Cuánto mide su otro lado?

f) Jaime tiene $500.00 más que su hermana Carmen, y Pedro tiene $36.00 menos que Carmen. ¿Cuánto mide cada uno?

g) En la clase de matemáticas, Héctor tiene las siguientes calificaciones:

-Primer periodo: 7.4
-Segundo periodo: 9.2
-Tercer periodo: 6.4
¿Qué calificación deberá tener en el examen global si necesita un 8?

h) Para hacer un trabajo, un albañil compró una varilla de 36 m de largo. Necesita cortarla en 3 partes de manera que mida 3 m más que la menor, y la mayor mida 6 m más que la menor. ¿Cuáles son las dimensiones de cada una?

i) Un padre deja una herencia de $600 000.00 que deberá repartirse de la siguiente manera: $240 00.00 para su esposa y el resto entre sus dos hijos, dejando a su hija el doble que a su hijo. ¿Cuánto le deja a cada quien?

j) Susana pesa 60 kg y su padre, 80 kg. Si el padre lleva a Susana al sube y baja del parque cercano a su casa, y ella se sienta a 4 m del punto de apoyo, ¿A qué distancia se deberá sentar para que el balancín quede equilibrado?

k) Un pantalón y una camisa cuestan $450.00. El pantalón cuesta $20.00 menos que el doble de la camisa. ¿Cuánto cuesta cada prenda?

l) La suma de 18 y tres veces un número es igual a 69. ¿Cuál es ese número?

m) Si al doble de un número le sumamos 12 y el resultado es 60, ¿cuál es ese número?

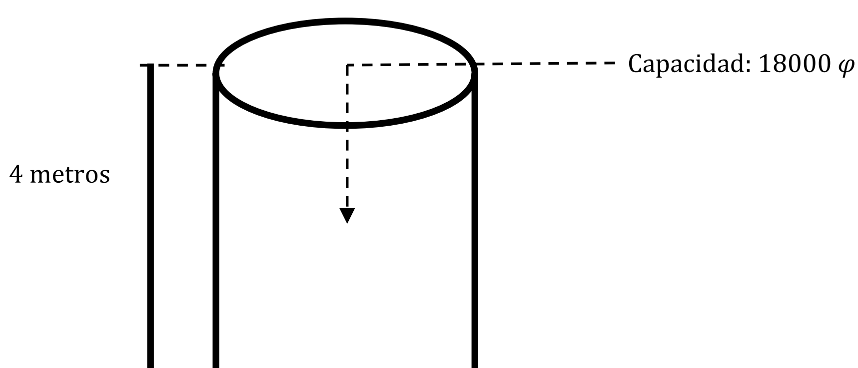
n) Carlos le dijo a Tomás: "Estoy pensando en un número que si multiplico por 3 y le resto 14, me da 43. ¿Cuál es ese número?

o) Luis pesa 12 kg más que Carlos, y la suma de los dos pesos es de 90 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?

DESPEJE DE FÓRMULAS

Ejemplos

1: Se desea construir un depósito de agua en forma de cilindro circular con una altura de 4m y capacidad de 10 000 litros.



Radio

Figura 2.1

¿Cuál debe ser la medida del radio?

Primero, investiga la fórmula para el volumen de un cilindro:

Ahora despeja la letra que representa al radio en la fórmula:

Ahora sustituye los datos en la fórmula en la que aparece despejado el radio:

¿Qué crees que sea más conveniente: cambiar las unidades de medida de la altura o las del volumen?

¿Se pueden cambiar los metros a litros?

¿Se puedes cambiar los litros a metros?

¿A cuántos litros equivalen 4 metros?

¿A cuántos metros cúbicos equivalen 18 000 litros?

2: Se desea saber a cuántos grados Fahrenheit (Fº) equivalen 36 graos centígrados (Cº). Se tiene la fórmula:

$$ºC = \frac{(ºF - 32) + 5}{9}.$$

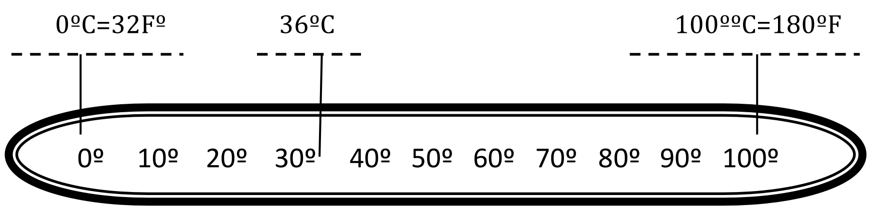


Figura 2.2

Despeja F:

Sustituye los datos en la fórmula despejada:

Realiza las operaciones, y anota el resultado:

3: Un automóvil sale de una ciudad a 80 km/h. Media hora después, sale otro automóvil a 90 km/h. Los dos automóviles salen del mismo lugar y se dirigen a la misma ciudad a una velocidad constante. Encuentra el tiempo que transcurre para que el segundo automóvil alcance al primero.

Tabla 2.2

AUTOMÓVIL	**VELOCIDAD**	**TIEMPO**	**DISTANCIA RECORRIDA (V x t)**
PRIMERO	80 km/h	t	80t
SEGUNDO	90 km/h	$t - \frac{1}{2}$	$90(t - \frac{1}{2})$

Según el problema, los automóviles coincidirán cuando hayan recorrido la misma distancia por lo que la ecuación que se tiene que resolver es:

Distancia recorrida por el primer automóvil. = Distancia recorrida por el segundo automóvil.

Ejercicios Despeja la literal indicada de cada una de las siguientes fórmulas:

1 $d = vt, v =$ **2** $A = \pi r^2,\ r =$ **3** $V = \frac{4\pi r^3}{3},\ r =$

4 $F = g\frac{mM}{d^2},\ m =$ **5** $S = v_0 t + \frac{gt^2}{2},\ v_0 =$ **6** $A = \frac{bh}{2},\ h =$

Investiga para qué se utiliza cada una de las fórmulas anteriores.

D Sistema de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones interrelacionadas, en el sentido de que deben convertirse en identidades para los mismos valores de las incógnitas.

Ejemplo

Supongamos que un alumno dice: "Compré dos bolígrafos y un lápiz por $5.00".

La ecuación que representa el problema, si al precio del bolígrafo lo representamos con x, y al de cada lápiz con y, es: $2x + y = 5$.

Si en una tabla representamos los valores que convierten a la ecuación en identidad, se obtiene lo siguiente.

x	1	2	3	4
y	3	1	-1	-3

Esto es, si x vale 1, y = 3.

Si x vale 2, y= ______________________________

Si x vale 3, y= ______________________________

Es conveniente aclarar que los valores de x = 3 y x = 4 dan valores negativos para y, lo que no es posible, pues el lápiz no puede costar -1 peso o -3 pesos.

En realidad, para la ecuación 2x + y = 5 hay un número infinito de valores de x y Y que la convierten en identidad, independientemente del contexto de los bolígrafos y lápiz. (La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 2.3).

Para que la solución de este tipo de ecuaciones sea única, debe establecerse otra condición. Por ejemplo, en el caso de los bolígrafos y los lápices, se podría plantear que después se compraron 3 bolígrafos y 4 lápices por $10.00. La ecuación que modela esta segunda situación es: $3x + 4y = 10$.

Trazando la línea recta que representa cada ecuación, vemos que las coordenadas del punto donde se intersecan convierten a ambas ecuaciones en identidad simultáneamente.

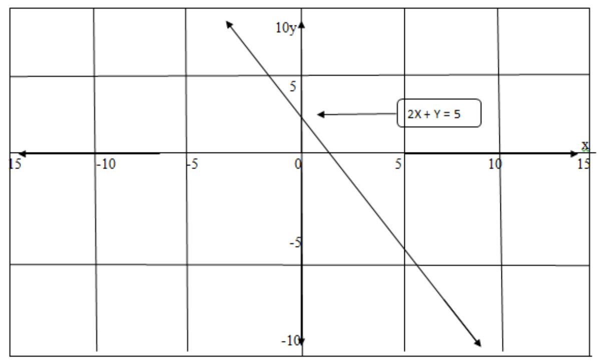


Figura 2.3

Así, a partir de la gráfica de la figura 2.4 se obtiene que la solución x = 2 & y = 1.

Comprobación

$2x + y = 5$	$3x + 4y = 10$
$2(2) + 1 = 5$	$3(2) + 4(1) = 10$
$4 + 1 = 5$	$6 + 4 = 10$
$5 = 5$	$10 = 10$

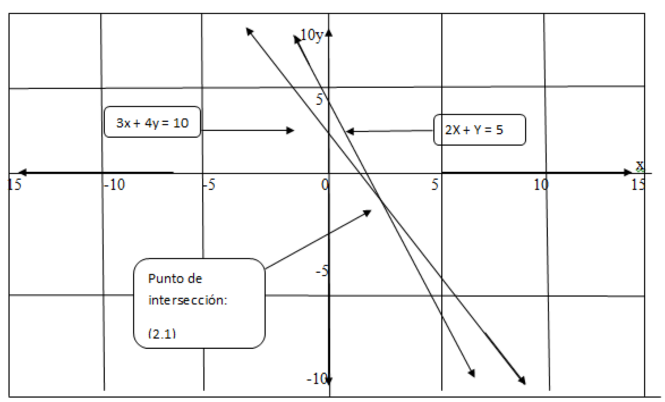


FIGURA 2.4

Haciendo un análisis del problema, tenemos que si sólo tomamos en cuenta la primera compra, dos bolígrafos y un lápiz por $5.00, la cantidad de soluciones es infinita. Por ejemplo.

Dos bolígrafos de $1.00 y un lápiz de $3.00: $2(1) + 1(3) = 5$.

Dos bolígrafos de $2.00 y un lápiz de $1.00: $2(2) + 1(1) = 5$.

Dos bolígrafos de $1.50 y un lápiz de $2.00: $2(1.5) + 1(2) = 5$.

Dos bolígrafos de $2.50 y un lápiz regalado: $2(2.5) + 1(0) = 5$.

Etcétera.

Sin embargo cuando se tiene una condición adicional expresada mediante una ecuación del mismo tipo, por ejemplo, ·3 bolígrafos y 4 lápices por \$10.00", es posible que el resultado simultáneo de ambas ecuaciones sea único. Así.

Tres bolígrafos de \$1.50 y 4 lápices de \$1.375: $3(1.5) + 4(1.375) = 10$.

Tres bolígrafos de \$2.00 y 4 lápices de \$1.00: $3(2) + 4(1) = 10$.

Tres bolígrafos de \$2.00 y 4 lápices de \$0.25: $3(3) + 4(0.25) = 10$

Encontramos que hay un precio de los productos que coincide en las ecuaciones, que además son las coordenadas del punto donde se intersecan las dos rectas, representadas respectivamente por $2x + y = 5$ y $3x + 4y = 10$. Este punto es $(2,1)$, lo que significa que cada bolígrafo vale \$2.00 y cada lápiz, \$1.00.

La simplicidad de este problema nos permite resolverlo por tanteo o mentalmente, pero no en todos los casos es problema hacerlo así. Por ello es necesario conocer procedimientos para resolver este tipo de ecuaciones simultáneas. Veamos algunos de ellos.

E Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Método de suma y resta (reducción)

Ejemplificaremos este primer método con la resolución del siguiente problema.

Por 2 plumas y un lápiz pagué \$5.00 y en una segunda compra de 3 plumas y 4 lápices pagué \$10.00. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

Precio de pluma: x

Precio de cada lápiz: y

Ecuaciones: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 4y = 10. \end{cases}$

El procedimiento consiste en hacer que los coeficientes de una de las incógnitas sean simétricos (iguales y de signos contrarios). Los coeficientes pueden igualarse en cualquier incógnita, pero en este caso es más fácil igualar los coeficientes de y.

Primero multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por 4:

$\begin{cases} 4(2x + y) = 4(5) \\ 3x + 4y = 10, \end{cases}$ Quedando: $\begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ 3x + 4y = 10. \end{cases}$

Luego, una vez que los coeficientes de y son iguales en ambas ecuaciones, se multiplican los miembros de una de ellas por -1:

$\begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ (-1)(3x - 4y) = (-1)10, \end{cases}$ y tendremos: $\begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ -3x - 4y = -10. \end{cases}$

Ahora se suman ambas ecuaciones miembro a miembro, obteniéndose:

$$\begin{array}{c} 8x + 4y = 20 \\ -3x - 4y = -10 \\ \hline 5x + 0 = 10 \end{array}$$

Se resuelve la ecuación que se obtiene con una incógnita:

$$5x = 10$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

Conociendo el valor de una de las incógnitas, se sustituye este valor de las ecuaciones originales:

$$2x + y = 5$$

$$2(2) + y = 5$$

$$4 + y = 5$$

$$y = -5 - 4$$

$$y = 1$$

Así, se tiene que cada pluma cuesta $2.99 (x = 2) y cada lápiz; $1.00 (y = 1).

Comprobación

$2x + y = 5$	$3x + 4y = 10$
$2(2) + y = 5$	$3(2) + 4(1) = 10$
$4 + 1 = 5$	$6 + 4 = 10$
$5 = 5$	$10 = 10$

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de reducción (suma y resta).

1. $\begin{cases} 6x + 3y = 48 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 5y = 35 \\ 8x - 3y = 28 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 9y = 78 \\ 9x - 5y = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 8x - 3y = 31 \\ 6x - 4y = 18 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5x + 8y = 63 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 8x - 3y = 23 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7x + 3y = 59 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 8x + 5y = 49 \\ 5x - 4y = -5 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 8x + 3y = 36 \\ 9x - 5y = 7 \end{cases}$

Método de sustitución

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x + 3y = 17, \end{cases}$$

Se puede resolver mediante el método de sustitución, que consiste en lo siguiente.

- Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
- Sustituir ese valor en la otra ecuación.
- Una vez obtenido el valor de una de las incógnitas, se sustituye una de las ecuaciones y se resuelve ésta.

Así, despejando x en la segunda ecuación, se tiene que:

$$x = 17 - 3y.$$

Se sustituye este valor de x en términos de y en la primera ecuación, 3x + 2y=23, obteniéndose.

$$3(17-3y)+2y=23,$$

Que es una ecuación con una sola incógnita. Procederemos a resolverla:

$$3(17-3y)+2y=23$$
$$52-9y+2y=23$$
$$-9y+2y=23-51$$
$$-7y=-28$$
$$y=\frac{-28}{-7}$$
$$y=4.$$

Sustituimos el valor de y=4 en la segunda ecuación, y la resolvemos:

$$x+3(4)=17$$
$$x+12=17$$
$$x=17-12$$
$$x=5.$$

Para comprobar que los resultados son correctos, se sustituyen en las dos ecuaciones los valores obtenidos.

$$3x+2y=23$$
$$3(5)+2(4)=23$$
$$15+8=23$$
$$23=23$$

$$x+3y=17$$
$$5+3(4)=17$$
$$5+12=17$$
$$17=17$$

Luego, como ambas ecuaciones se convierten en identidades al sustituir los valores encontrados, la solución del sistema es x=5 & y=4.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de sustitución.

1. $\begin{cases}4x+3y=17\\5x+4y=22\end{cases}$

2. $\begin{cases}6x+5y=62\\3x+4y=37\end{cases}$

3. $\begin{cases}5x+4y=6\\3x-2y=30\end{cases}$

4. $\begin{cases}8x-4y=52\\7x+4y=53\end{cases}$

5. $\begin{cases}5x+8y=-39\\3x+5y=-24\end{cases}$

6. $\begin{cases}4x-8y=-24\\5x+9y=-11\end{cases}$

7. $\begin{cases}6x-2y=12\\9x-4y=12\end{cases}$

8. $\begin{cases}8x-5y=-4\\3x+2y=14\end{cases}$

Método de igualación

El método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en lo siguiente.

- Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- Se igualan ambos despejes y se resuelve la ecuación que se obtenga con una incógnita.
- Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas, se procede igual que en los otros métodos: se sustituye el valor encontrado de la incógnita en una de las ecuaciones.

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}2x+5y=22\\4x-4y=16,\end{cases}$$

Al despejar la misma incógnita (x) en las dos ecuaciones, se obtiene:

$2x + 5y = 22$	$4x - 4y = 16,$
$2x = 22 - 5y,$	$4x = 16 + 4y,$
$x = \frac{22-5y}{2}$	$x = \frac{16+4y}{4}.$

Igualándolas, se tiene que

$$\frac{22-5y}{2} = \frac{16+4y}{4}.$$

Ahora se puede aplicar la ley que dice que si dos números racionales son iguales entonces sus productos cruzados son iguales.

$$4(22 - 5y) = 2(16 + 4y).$$

Resolviendo esta última ecuación en y:

$$88 - 20y = 32 + 8y$$

$$-20y - 8y = 32 - 88$$

$$28y = -56$$

$$y = \frac{-56}{-28}$$

$$y = 2.$$

Ahora sustituimos el valor de y = 2 en la primera ecuación del sistema, 2x + 5y = 22, y la resolvemos:

$$2x + 5(2) = 22$$

$$2x + 10 = 22$$

$$2x = 22 - 10$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

Finalmente se comprueba el resultado sustituyendo en las dos ecuaciones los valores encontrados.

$2x + 5y = 22$	$4x - 4y = 16$
$2(6) + 5(2) = 22$	$4(6) - 4(2) = 16$
$12 + 10 = 22$	$24 - 8 = 16$
$22 = 22$	$16 = 16$

Como ambas ecuaciones del sistema se convierten en identidades al sustituir los valores encontrados, la solución es x = 6 y y = 2.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de igualación.

1. $\begin{cases} 4x \text{ y } 7y = 102 \\ 5\,x - 3y = 57 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ 9x + 4y = 60 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6 + 2y = 12 \\ 9x + 3y = 54 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x + 6y = 39 \\ 4x - y = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x - 4y = 13 \\ 4x + 3y = 55 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

Método gráfico

El método gráfico para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en lo siguiente:

- Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- Se hace una tabulación para cada ecuación dando valores a la incógnita que no se despejó y así obtener los valores correspondientes de la incógnita despejada.
- En un plano cartesiano se localizan los puntos correspondientes a cada par de valores de las incógnitas y se traza la línea recta que pasa por los puntos localizados.

Así, dado el sistema

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 2, \end{cases}$$

Despejamos la incógnita y en las dos ecuaciones:

$$x - y = -2,$$
$$-y = -2 - x,$$
$$(-1)(-y) = (-1)\,(-2 - x),$$
$$y = 2 + x$$

$$x + y = 2,$$
$$y = 2 - x.$$

Tabulando para algunos valores de x:

x	-1	0	1	2
y = 2x + x	1	2	3	4

x	0	1	2	3
y = 2 – x	2	1	0	-1

Con los pares de valores de las tablas, trazamos las gráficas.

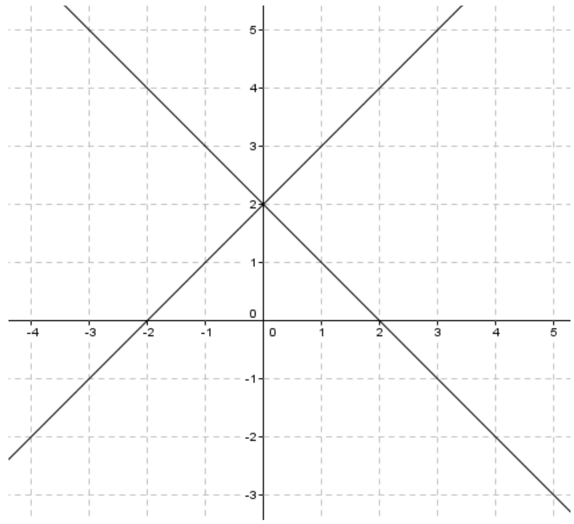


Figura 2.5

Se observa que la gráfica de la figura 2.5 que las dos rectas se intersecan en el punto de coordenadas (0,2). Esto significa que la solución del sistema es x = 0 y y =2.

Comprobación:

$x - y = -2$	$x + y = 2$
$0 - 2 = -2$	$0 + 2 = 2$
$-2 = -2$	$2 = 2$

Ejercicios Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x - y = 17 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$

<u>Método de determinaciones</u>

Al producto de dos números m y n menos el producto de otros números p y q, mn − pq, se le representa así:

$$mn - pq = \begin{vmatrix} m & q \\ p & n \end{vmatrix}$$

A esta expresión se le conoce como ***determinante de los números m, q, p, n***, en el orden indicado.

A la diagonal que une m con n se le conoce como *diagonal principal*, y a la diagonal que une p con q se le conoce como *diagonal secundaria.*

A un determinante que se obtiene de dos filas y dos columnas se le conoce como *determinante de segundo orden*.

Luego, el determinante de segundo orden de cuatro números dados se obtiene multiplicando los términos de la *diagonal principal* y restándole a este producto el de los términos de la *diagonal secundaria.*

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x y y,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_{2x} + b_2y = c_2, \end{cases}$$

Al número se le $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ llama determinante del sistema.

Se forman otros dos determinantes sustituyendo los valores a_1 y a_2 de la primera columna por los términos independientes c_1 y c_2 correspondientes,

$$\begin{vmatrix} C_1 & b_1 \\ C_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

Al dividir este resultado por el resultado del determinante del sistema, se obtiene el valor de la primer incógnita

$$\boldsymbol{x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Y luego, haciendo lo mismo con los valores de la segunda columna,

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Al dividir este resultado por el resultado del determinante del sistema, se obtiene el valor de la primer incógnita

$$\boldsymbol{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Ejemplo Resuelve el sistema mediante el método de determinantes:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema dado es de la forma $ax + by = c$. Así, en la primera se tiene que $a_1 = 3$, $b_1 = 4$ y $c_1 = 23$. En la segunda ecuación se tiene que $a_2 = 5$, $b_2 = 2$ y $c_2 = 29$. Luego,

Así, x= 5 y y = 2.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de determinantes.

a) $\begin{cases} 4x + 5y = 30 \\ 3x + 7y = 29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x - 2y = 3 \\ 8x + 5y = 23 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x + 9y = 35 \\ 6x + 5y = 21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 3y = 55 \\ 6x - 2y = 38 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + 6y = 40 \\ 7x - 8y = -78 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 9y = 43 \\ 3x - y = 21 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 4x + 7y = 51 \end{cases}$

EJERCICIOS ADICIONALES

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando dos métodos distintos.

a) $\begin{cases} 5x + 5 = 4y + 6 \\ 3x + 5y = 21 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 9y = 80 - y \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 6y = 20 - 2x \end{cases}$ j) $\begin{cases} 3x + 4y = 36 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3x}{2} + 2y = 10 \\ 5x = 3y + 14 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + 4y = 39 \\ 5x + y = 48 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + y = 26 \\ 4x - y = 30 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x + 2y = 39 - 4y \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = x + 18 \\ \frac{x}{2} + 5y = 27 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x = 19 - 2y \\ 6x = 26 + 2y \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3x + 6y = 48 \\ 2x + 5y = 38 \end{cases}$

Problemas de aplicación

Se compraron 3 shorts y 4 camisetas por \$550. 00 y después se compraron 5 shorts y 9 camisetas por \$1080.00 ¿Cuánto costó cada artículo?

- Precio de un short: x,
- Precio de una camiseta: y.

Así,

$$\begin{cases} 3x + 4y = 550 \\ 5x + 9y = 1080. \end{cases}$$

Utilizaremos el método de suma y receta para resolver el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema planteado. Multiplicando por 5 ambos miembros de la primera ecuación y por 3 los de la segunda.

$$\begin{cases} 5(3x + 4y) = 5(550) \\ 3(5x + 9y) = 3(1080) \end{cases} \qquad \begin{cases} 15x + 20y = 2750 \\ 15x + 27y = 3240. \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por -1,

$$\begin{cases} -15x - 20y = -2750 \\ 15x + 27y = 3240. \end{cases}$$

Luego, sumando miembro a miembro ambas ecuaciones,

$$7y = 490$$

$$y = \frac{490}{7} = \mathbf{70}$$

Sustituyendo en la primera ecuación el valor de y encontrado,

$$3x + 4(70) = 550$$

$$3x + 280 = 550$$

$$3x = 550 - 280$$

$$3x = 270$$

$$x = \frac{270}{3} \;\mathbf{= 90.}$$

Entonces, cada short costó \$90. 00 y cada camiseta \$70.00.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. Dos números suman 81 y su diferencia es 25. Halla los números.
2. Un número es igual al doble del otro y su suma es igual a 36. Halla los números
3. En un viaje de 800 km, dos amigos manejan alternadamente. Al final del viaje Héctor le dice a Luis: "Si hubiera manejado 20 km más, habría manejado el doble que tu". ¿Cuántos kilómetros manejo cada uno?
4. En una alcancía hay monedas de 5 y 10 pesos. El total de monedas es de 350 y la cantidad que se juntó es de \$2500. 00. ¿Cuántas monedas hay de 5 y cuantas de 10?
5. Dos amigos compraron un automóvil cada uno. El de Jorge costó \$12000.00 más que el de Pablo y el costo de los dos fue de \$150000.00. ¿Cuál fue el precio de cada automóvil?
6. Por 3 cuadernos y 2 lápices pague \$18.00, y por 5 cuadernos y 4 lápices pagué \$31.00. ¿Cuál fue el precio de cada artículo?
7. El boleto de entrada al cine cuesta \$28.00 para adultos y \$22.00 para los ancianos. Si un día se venden 100 boletos por un total de \$2680.00. ¿Cuántos ancianos y cuantos adultos asistieron?
8. Con un viento a favor, un avión recorrió 240 km en 30 minutos (1/2 hora) y en su regreso, sin que el viento cambiara de dirección, le llevó 36 minutos (3/5 de hora). ¿Cuál era la velocidad del avión y cuál era la del viento?
    - Velocidad del avión: x
    - Velocidad del viento: y
    - Velocidad con el viento a favor: x + y
    - Velocidad en contra del viento: x – y

    Distancia es igual a velocidad por tiempo

    - Viaje de ida: $240 = (x + y)\ 1/2$
    - Viaje de regreso: $240 = (x - y)\ 3/5$

9. Una persona navega en una lancha de remos contra la corriente y tarda 4 horas en recorrer 24 km. Si en el regreso hizo dos horas, ¿Cuál es la velocidad de la lancha y cual la de la corriente?
10. Enrique tiene 12 años más que Luis. En 9 años, la edad de Enrique será el doble de la de Luis. ¿Cuál es la edad de cada uno ahora?
11. Con la corriente a su favor, una lancha recorre 36 km en 3 horas y con la corriente en su contra recorre la misma distancia en 4 horas. ¿Cuál es la velocidad de la lancha y cual la velocidad de la corriente?
12. Con la corriente de un rio a su favor, una lancha recorre 36 km en 3 horas y el regreso le toma 9 horas. Halla la velocidad de la corriente y la velocidad de la lancha.

13. Con un viento a su favor, un avión recorre 1200 km en 3 horas y el regreso, sin cambio en el viento, le toma 4 horas. Halla la velocidad del avión y la velocidad del viento.
14. Por 3 cuadernos y 5 bolígrafos se pagaron \$44.00, y por 5 cuadernos y 2 bolígrafos, se pagaron \$48.00. Halla el precio de cada artículo.
15. A una función de cine entraron 100 personas, adultos y niños. El boleto de niño costaba \$14.00 y el de adulto \$36.00. ¿Cuántos adultos y cuantos niños entraron a la función de cine si se recaudaron \$2720.00?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, se puede utilizar cualquiera de los métodos estudiados para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Veamos primero un ejemplo con el método de suma y resta.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \ \ldots(1) \\ 2x + 3y + z = 19 \ \ldots(2) \\ x + y + z = 10, \ \ldots(3) \end{cases}$$

Se decide cuál de las tres incógnitas se va a eliminar. En este caso es conveniente eliminar la z porque aparece con el mismo coeficiente en las tres ecuaciones.

- Combinando las ecuaciones (1) y (2), se elimina la z multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por – 1.

$$-1(x + 2y + z) = -1(12)$$

$$-x - 2y - z = -12$$
$$2x + 3y + z = 19 \ \ldots(2)$$

$$x + y \ = 7 \ \ldots(4)$$

- Combinando las ecuaciones (2) y (3), se elimina z, multiplicando ambos miembros de la ecuación -1.

$$-1(x + y + z) = -1(10)$$

$$-x - y - z = -10$$

$$x + 3y + z = 19 \ \ldots(2)$$

$$x + 2y \ = 9 \ \ldots(5)$$

- Combinando las nuevas ecuaciones (4) y (5), se forma un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que ya sabes cómo resolver.

$$x + y = 7 \ \ldots(4)$$

$$x + 2y = 9 \ \ldots(5)$$

- Se multiplican ambos miembros de la ecuación (4) por – 1 para eliminar la x.

$$-1(x + y) = -1(7)$$

$$-x - y = -7$$
$$x + 2y = 9 \;...(5)$$

$$y = \mathbf{2}$$

- Se sustituye el valor obtenido de una de las incógnitas (y = 2) en la ecuación (4) o en la (5). En este caso escogemos la ecuación (4).

$$x + y = 7 \;...(4)$$

$$x + 2 = 7$$

$$x = 7 - 2 = \mathbf{5}$$

- Ahora sustituimos estos dos valores (x = 5 y y = 2) en una de las tres primeras ecuaciones. En este caso, por sencillez, lo haremos en la ecuación (3) y así obtendremos el valor de z.

$$x + y + z = 10$$

$$5 + 2 + z = 10$$

$$z = 10 - 5 - 2$$

$$z = \mathbf{3}$$

Comprobando los resultados sustituyendo en las ecuaciones originales del sistema dado.

$x + 2y + z = 12 \;...(1)$	$2x + 3y + z = 19 \;...(2)$	$x + y + z = 10 \;...(3)$
$5 + 2(2) + 3 = 12$	$2(5) + 3(2) + 3 = 19$	$5 + 2 + 3 = 10$
$5 + 4 + 3 = 12$	$10 + 6 + 3 = 19$	$10 = 10$
$12 = 12$	$19 = 19$	

Como las tres ecuaciones se convierte en identidades al hacer las sustituciones, se tiene que la solución del sistema en x = 2, y = 5 y z = 3.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Verifica los resultados que obtengas.

1. $2x + y + 3z = 25$
   $x + 3y + z = 20$
   $2x + 2y + 2z = 24$
2. $2m + 2n + 3p = 22$
   $m + n + 2p = 13$
   $3m + 2n + 4p = 28$
3. $3x + 4y + 5z = 38$
   $2x - 3y + 4z = 11$
   $x + y + z = 9$
4. $2x + 5y - 4z = 12$
   $x + 7y - 2z = 29$
   $2x + 3y - z = 20$
5. $3x + 5y - 2z = 16$
   $4x - y - z = -1$
   $2x + 5y + z = 19$

Método de determinantes

El procedimiento para calcular un determinante de tercer orden es el mismo que para los determinantes de segundo orden. Un determinante de tercer orden consta de tres filas y tres columnas. *El procedimiento que recomendamos para calcular su valor consiste en agregar dos filas repitiendo las dos primeras al final y así completar el trazo de las diagonales.* Luego, *a la suma de todos los productos de las diagonales primarias se les resta la suma de los productos de las diagonales secundarias.*

Ejemplo Resolver el sistema

$$2x + y + 3z = 11$$
$$x + 3y + 2z = 14$$
$$3x + 2y + 4z = 17,$$

Para obtener el valor de y, se sigue el mismo procedimiento que para x. se sustituyen los valores ya conocidos. El determinante del denominador obtenido para x es el mismo que para y, por lo que el valor de la tercera variable se puede obtener sustituyendo los valores calculados de las incógnitas x y y en una de las ecuaciones; como x = 1 y y = 3, sustituimos estos valores en la primera ecuación para obtener el valor de z:

$$2x + y + 3z = 11$$
$$2(1) + 3 + 3z = 11$$
$$2 + 3 + 3z = 11$$
$$5 + 3z = 11$$
$$3z = 11 - 5$$
$$3z = 6$$
$$z = \frac{6}{3}$$
$$z = 2.$$

Así, se tiene que la solución del sistema dado es x = 1, y = 3, y z = 2.

En forma general, dado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

Se calcula el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1)$$

Se calcula el determinante de las respectivas variables

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2) - (d_2b_1c_3 + d_1b_3c_2 + d_3b_2c_1)$$

Entonces, se divide el resultado de la variable con el del determinante del sistema para obtener el resultado de la variable

$$x = \frac{(d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2) - (d_2b_1c_3 + d_1b_3c_2 + d_3b_2c_1)}{(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2 + a_3b_2c_1)}$$

Y así sucesivamente con las otras dos variables.

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por determinantes.

1. 2x + 3y + z = 16
   3x + 2y + 2z = 20
   4x + 3y + z = 24

2. 3x + 4y + 2z = 25
   2x + y + 3z = 15
   x + 2y + 3z = 12

3. 3x + 2y + z = 17
   x + 3y + 2z = 17
   5x + y + z = 21

4. 4x – 2y + 3z = 13
   3x – 2y – 4z = -25
   x + 3y – z = 19